முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

MORA E-TAMILS 2018 | Tamil Students, Faculty of Engineering, University of Moratuwa

மொறட்டுவை பல்கலைக்கழக பொறியியற் பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்களுக்கான 7வது முன்னோடிப் பரீட்சை - 2016

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர) முன்னோடிப் பரீட்சை - 2016
General Certificate of Education (Adv.Level) Pilot Examination - 2016

இணைந்த கணிதம் I
Combined Maths I

10 T I

பகுதி B

* ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. *(a)* x இன் படி 4 ஆகவுள்ள $F(x), G(x), H(x)$ என்னும் பல்லுறுப்பிகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன.

$F(x) \equiv \left(3x^2 - \alpha x + 3\right)\left(3x^2 - \beta x + 3\right)$; இங்கு α, β ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள்.

$G(x) \equiv x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + \lambda,$

$H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$

i) $F(x) = 0, G(x) = 0$ ஆகிய இரண்டும் ஒரே மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் λ ஐக் காண்க.
α, β ஆகியவற்றை அதன் மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $x^2 - 9x + 18 = 0$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து, சமன்பாடு $G(x) = 0$ இன் மூலகங்களில் இரண்டு சமனான மெய் மூலகங்கள் எனவும் மற்றைய இரண்டும் கற்பனை எனவும் காட்டுக.

ii) $F(x) \equiv 9H(x)$ எனின், α, β ஆகியவற்றுக்கு இருக்கத்தக்க பெறுமானங்களைக் கண்டு, சமன்பாடு $H(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை **அல்ல** எனக் காட்டுக.

(b) $f(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + x - 10$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $a, b, c \in IR$

$(x-1), (x-2)$ என்பன $f(x)$ இன் காரணிகளாகவும், $(x+1)$ ஆல் $f(x)$ ஐ வகுக்க வரும் மீதி 48 ஆகவும் இருப்பின் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
$f(x)$ ஐ $(2x+1)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதியைக் கண்டு, $f(x)$ ஐ ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக தருக.

12. *(a)* ஓர் கலவன் பாடசாலையில் உயர்தர வகுப்பில் முதற்கட்டமாக 5 மாணவ பிரதிநிதிகள் கொண்ட குழு தெரிவு செய்ய வேண்டியுள்ளது. இவ் 5 மாணவர்களில் ஒருவர் மாணவ தலைவராகவும் இருக்க வேண்டும். இனம் காணப்பட்ட 5 விஞ்ஞான மாணவர்கள் (3 மாணவன்கள், 2 மாணவிகள்), 8 கலைத்துறை மாணவர்கள் (6B,2G), 7 வர்த்தகத்துறை மாணவர்கள் (4B,3G), 3 தொழில்நுட்பத்துறை மாணவர்கள் (2B,1G) ஆகியோரில் இருந்து இவ் 5 பேரும் தெரிவு செய்யப்படுதல் வேண்டும். மாணவத்தலைவர் விஞ்ஞான துறை மாணவனாக அல்லது விஞ்ஞான துறை மாணவியாக இருத்தல் வேண்டும். மிகுதி 4 பேரும் விஞ்ஞானத்துறை அல்லாத மாணவர்களாக இருத்தல் வேண்டும். பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் குழு ஆக்கப்படக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

i) குழுவில் குறைந்தபட்சம் ஒரு கலைத்துறை மாணவனும் ஓர் கலைத்துறை மாணவியும் இடம் பெறவேண்டும் எனின்.

ii) ஒவ்வொரு பிரிவிலும் குறைந்தது ஒருவராவது இடம் பெறுமாறும் அத்துடன் ஒரே துறையில் இருவர் இடம்பெறுகையில் ஒருவர் ஆணாகவும் மற்றவர் பெண்ணாகவும் இடம் பெறவேண்டும் எனின்.

(b) $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ எனக் காட்டுக.

$\left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(r-1)r}{2}\right]^2$ ஐக் கருதுவதன் மூலம் $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ எனவும் காட்டுக.

எல்லா நேர் நிறை எண் r இற்கும் r ஆம் உறுப்பு u_r ஆனது r இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாகவுள்ள தொடரில் r ஆம் உறுப்பினதும் (r+1) ஆம் உறுப்பினதும் கூட்டுத்தொகை $r(2r^2+3r-3)$ ஆகும்.

i. $u_r = r^3 - 3r + 1$ எனக் காட்டுக.

ii. $\sum_{r=1}^{n} u_r$ ஐக் காண்க.

13. *(a)* A,B,C ஆகிய 3 தாயங்கள் $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ஆகியவற்றினால் தரப்படுகின்றன.

i) $C^2 - 2C + 2I = O$ எனக்காட்டி C^{-1}ஐ காண்க. இங்கு I ஆனது 2x2 சர்வசமன்பாட்டு தாயமும் O ஆனது 2 x 2 பூச்சியத்தாயமும் ஆகும்.

ii) AB ஐ காண்க.

iii) CX –AB = O எனும் தாயச்சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் 2x2 தாயம் X ஐ காண்க. இங்கு O ஆனது 2 x2 பூச்சியத்தாயமாகும்.

(b) சிக்கலெண்கள் $Z_1=1$, $Z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$ ஆகும் $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. ஆகன் வரிப்படத்தில் Z_1 , Z_2 என்னும் சிக்கலெண்களை முறையே A,B என்னும் புள்ளிகள் வகைகுறிக்கின்றன. (Z_1+Z_2) ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளி C ஐக் காண்க. **இதிலிருந்து** $|Z_1+Z_2|$,(Z_1+Z_2) இன் வீசல் என்பவற்றைக் காண்க.

(Z_1+Z_2) ஐ $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனும் வடிவில் எழுதுக.

மேலும் $-\pi < \theta \le \pi$ எனின் $|Z_1+Z_2|$இன் உயர்வையும் , அதற்கொத்த Z_2 ஐயும் எழுதுக.

$Z = x + iy$ எனும் சிக்கலெண்ணானது $Z = Z_1 + Z_2$ ஆகுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. θ மாறுகின்ற போது Z இன் ஒழுக்கு யாது?

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

14. *(a)* முதற்கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\dfrac{d\tan x}{dx} = sec^2 x$ என நிறுவுக. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}$ ஐ உய்த்தறிக.

y என்பது x இல் சார்பாக இருக்க $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d(\tan^{-1} x)}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \cos\left[2\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)\right]$ ஆயின், $\tan^{-1} x = \theta$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேறுவழியாகவோ $\dfrac{dy}{d(\tan^{-1} x)} = \sqrt{2}\cos\left[\dfrac{\pi}{4} + \tan^{-1} x\right]$ எனக் காட்டுக.

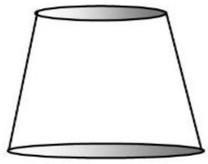
(b) $f(x) \equiv \dfrac{1+2x}{x(x+1)}$ எனக் கொள்வோம். $y = f(x)$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக.

$y = mx$ என்ற நேர்கோட்டினதும் $y = f(x)$ என்ற வரைபினதும் இடைவெட்டுக்களைக் கருத்தில் கொண்டு $mx^3 + mx^2 - 2x - 1 = 0$ எனும் முப்படிச் சமன்பாடானது

i) $m > 0$ எனின் மூன்று மெய்மூலங்களை உடையது எனவும்

ii) $m \le 0$ எனின் ஒரு மெய் மூலத்தை மட்டுமே உடையதெனவும் காட்டுக.

(c) வட்டக் குறுக்குவெட்டுள்ள நேரான அடிமரமொன்று $5m$ நீளமுள்ளதாகும். இந்த அடிமரம் சீராகக் கூம்பிச் செல்கிறது. அடி மரத்தின் ஒரு முனையின் ஆரை $1.5m$ உம் , மற்ற முனையின் ஆரை $0.5m$ உம் ஆகும். இந்த அடிமரத்தில் இருந்து வெட்டி எடுக்கத்தக்க மிகக் கூடிய கனவளவு உடைய உருளைக் கம்பமொன்றின் நீளம் $2.5m$ எனக் காட்டுக.



15. *(a)* பகுதிப்பின்னங்களைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ என நிறுவுக.

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin x}dx = \pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ எனக் காட்டுக.

(c) $\displaystyle A = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx$ எனவும் $\displaystyle B = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx$ எனவும் தரப்படின், பொருத்தமான பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி $A = B$ எனக் காட்டுக.

$A + B$ இன் பெறுமானத்தை காண்க. **இதிலிருந்து** $A = B = \dfrac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

(d) பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\displaystyle\int_0^1 x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)dx$ ஐ $a + b\ln\left(\tfrac{2}{3}\right)$ எனும் வடிவில் உணர்த்தி a, b ஐக் காண்க.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

16. $ax+by+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் நேர்கோட்டின் மீது (α,β) என்னும் புள்ளியின் ஆடிவிம்பப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் எழுதுக.

ΔABC யில் AB, AC யின் செங்குத்து இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $y+2x=0,$ $3y=x$ ஆகும். முக்கோணியின் சுற்றுவட்ட மையம் N ஆகும். NA ஆனது (2,2) ஊடும் , BC ஆனது (3,4) ஊடும் செல்கின்றன.

(a) A,B,C யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(b) Δ ABC இன் சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(c) A,N ஊடு செல்லும் எல்லாவட்டங்களின் சமன்பாட்டை $x^2+y^2+2tx+(40-2t)y=0$ எனும் வடிவில் இடலாம் எனக்காட்டுக. இங்கு t பரமானம்.
இதிலிருந்து இவ்வட்டத் தொகுதியில் மிகச்சிறிய ஆரை கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. *(a)* $$\frac{\cos 2x+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\sin 2x+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+1}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$$ எனக் காட்டுக.

(b) முக்கோணி ஒன்றிற்கான சையின் விதியைக் கூறுக.

$ABCD$ எனும் நாற்பக்கலில் $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle BAC=\theta$, $\angle ACB=\alpha$, $\angle ACD=\beta$, $AB=l$, $AD=m$ ஆகும். ΔABC , ΔADC ஆகியவற்றிற்கு தனித் தனியே சையின் விதியைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $AC=\left[\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}\right]l=\left[\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\sin\beta}\right]m$ எனக் காட்டுக.

$\cot\theta=\dfrac{m-l\cot\alpha}{l-m\cot\beta}$ என்பதை **உய்த்தறிக**.

(c) $f(x)=4(\sin^4 x+\cos^4 x)$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)=3+\cos 4x$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக $|x|\le\dfrac{\pi}{2}$ இற்கு $f(x)=4(\sin^4 x+\cos^4 x)$ இன் பரும்படிப்படத்தை வரைக.

வளையி $y=f(x)$ இனாலும் $x=\pm\dfrac{\pi}{2}, y=2$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் கோடுகளினாலும் வரைபுற்ற பரப்பளவைக் கணிக்க.

***