MORA | TAMILS 2019 | Tamil Students, Faculty of Engineering, University of Moratuwa

மொறட்டுவை பல்கலைக்கழக பொறியியற் பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்களுக்கான முன்னோடிப் பரீட்சை - 2017

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர) முன்னோடிப் பரீட்சை - 2017
General Certificate of Education (Adv.Level) Pilot Examination - 2017

இணைந்த கணிதம் II
Combined Maths II

10	T	II

பகுதி B * ஐந்து வினாக்களிற்கு மட்டும் விடை தருக.

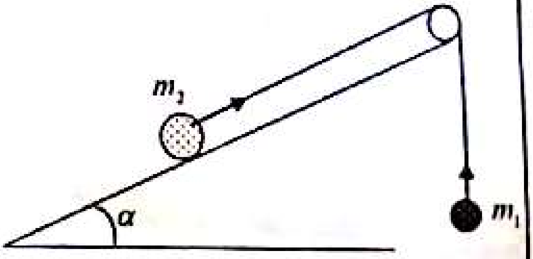
Q11) **a.** A, B எனபன $m, 3m$ திணிவுடைய இரு கோளங்களாகும். கிடையான ஒப்பமான மேசை மீது B ஓய்வில் இருக்க A ஆனது நேரடியாக u வேகத்துடன் B ஐ மோதுகிறது. e ஆனது A, B இற்கு இடையிலான மீளமைவுக் குணகம் ஆகும். மோதலின் பின A ஆனது பின்னடிக்கிறது எனின்,

(i) மோதலின் பின் B இன் வேகம் $\frac{u}{4}(1+e)$ எனக் காட்டுக.

(ii) மோதலின பின் A யின் வேகம் யாது?

(iii) தொடரும் இயக்கத்தில் B செங்குத்தான சுவரினை மோதுகின்றது. B யிற்கும் சுவிற்கும் இடையிலான மீளமைவுக்குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். B ஆனது மீண்டும் A யினை மோதும் எனின், $\frac{1}{3} < e < \frac{3}{5}$ எனக்காட்டுக.

b. m_1, m_2 எனும் இரு திணிவுகள இலேசான நீட்டமுடியாத ஓர் இழையினால இணைக்கப்பட்டு படத்தில் காட்டியது போல் ஒப்பமான கப்பி ஒன்றின மேலாகச் செல்கின்றது. இக்கப்பியானது α சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின் உச்சியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) சாய்தளம் ஒப்பமானது எனின் m_1 இறங்கும் ஆர்முடுகலையும் இழையில் உள்ள இழுவையையும் காண்க.

(ii) சாய்தளம் கரடானதும் உராய்வுக் குணகம் μ ஐக் கொண்டதும் எனின் m_1 இறங்கும் ஆர்முடுகலையும் இழையில உள்ள இழுவையையும் காண்க.

(iii) சாய்தளம் உராய்வு இருந்தபோது உள்ள ஆர்முடுகலுக்கும், சாய்தளம் ஒப்பமாக இருந்தபோது உள்ள ஆர்முடுகலுக்கும் இடையிலுள்ள வித்தியாசம் $\frac{\mu m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g$ எனக் காட்டுக.

Q12) **a.** O வை மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு நிலைதத ஒப்பமான கோள ஓட்டின் உள்ளே, அதன் அதிதாழ் புள்ளியிலிருந்து m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை P யானது கிடையாக u வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. OP யானது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஒரு கூர்ங்கோணம் θ வை ஆக்கும் போது துணிக்கையின் கோணவேகம் $\omega = \frac{1}{r}\sqrt{u^2 - 2gr(1-\cos\theta)}$ எனவும், கோள ஓட்டினால் துணிக்கைக்குக் கொடுக்கப்படும் மறுதாக்கம் $R = \frac{m}{r}\{u^2 - gr(2 - 3\cos\theta)\}$ எனவும் காட்டுக.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

$u \geq \sqrt{5gr}$ எனின் துணிக்கை பூரண வட்ட இயக்கத்தை ஆற்றும் என நிறுவுக. $u \geq \sqrt{5gr}$ இற்கு இத்துணிக்கையின் அதிஉயர்ந்த, அதிகுறைந்த கோணவேகங்கள் முறையே ω_1, ω_2 உம், அதிஉயர்ந்த, அதிகுறைந்த மறுதாக்கங்கள் முறையே R_1, R_2 உம் எனின் $\omega = \sqrt{\omega_1^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta + \omega_2^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$ எனவும் $R = R_1 \cos^2 \frac{1}{2}\theta + R_2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$ எனவும் காட்டுக.

b. ஒரு புள்ளி O விலிருந்து உயரம் h இல் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C யில் கிடையுடன் கோணம் θ இல் மேல்நோக்கி சாய்ந்து வேகம் u உடன் ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் ஒரு துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. O இனூடான கிடைத்தளத்தின் மீது இத்துணிக்கையின் வீச்சு R எனின்

$$R^2 \tan^2\theta - \frac{2u^2}{g} R\tan\theta + R^2 - \frac{2hu^2}{g} = 0$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து இய வேகம் u இற்கு O இனூடான கிடைத்தளத்தின் மீது இத்துணிக்கையின் அதி உயர் வீச்சு $\sqrt{\frac{u^4}{g^2} + \frac{2hu^2}{g}}$ என உய்த்தறிக. இதன் அதி உயர் வீச்சு R' எனவும் இதற்கான எறியல் கோணம் α உம் எனின் $\tan 2\alpha = \frac{R'}{h}$ என உய்த்தறிக.

Q13) A, B என்பன ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது இடைத்தூரம் $3l$ இல் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை P ஆனது A யிற்கும் B யிற்குமிடையே AB மீது உள்ள ஓர் புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் l உம் மீள்தன்மை மட்டு $3mg$ யையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி A உடனும் இயற்கை நீளம் l உம் மீள்தன்மை மட்டு λ வையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி B உடனும் துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது $AC = \frac{3}{2}l$ ஆன புள்ளி C யிலே நாப்பத்தில் இருக்குமெனின் λ ஐ எழுதுக.

துணிக்கை P ஆனது B இல் வைக்கப்பட்டு, பின்னர் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. இழை BP இறுகும்போது துணிக்கை P யின் வேகம் $3\sqrt{gl}$ எனக் காட்டுக.

தொடர்ந்து இரு இழைகளும் இறுகி இருக்கையில் ஆரம்ப நாப்பத்தானம் C யில் இருந்து CB வழியே அளக்கப்பட்ட துணிக்கை P யின் இடப்பெயர்ச்சி x எனின் $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{6g}{l}x = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$. மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ஐ உடையதெனக் கொண்டு A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

இழை BP இறுகியதிலிருந்து இழை AP தொய்யும் வரைக்குமான நேரம் $\left(\frac{2l}{3g}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ எனக் காட்டுக.

பக். 9 ஐ பார்க்க

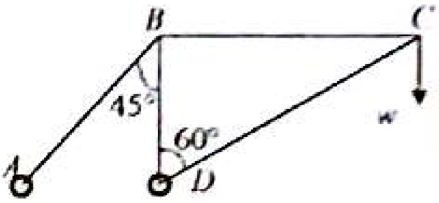
Q14) a. பக்கத்தின் நீளம் **2m** ஆகவுள்ள ஒரு சதுரம் $ABCD$ யின் $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BD}$ ஆகிய பக்கங்கள் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே $2,1,3,4,2\sqrt{2}$ நியூட்டன் எனும் பருமன்களை உடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு AD ஐ E யில் வெட்டின் நீளம் AE ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) இவ் விசைத்தொகுதியை சமனிலையில் வைத்திருக்க சேர்க்கப்பட வேண்டிய விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) விளையுள் விசையை புள்ளி D யிற்கு மாற்றத்தேவையான இணையின் பருமனையும் போக்கையும் காண்க.

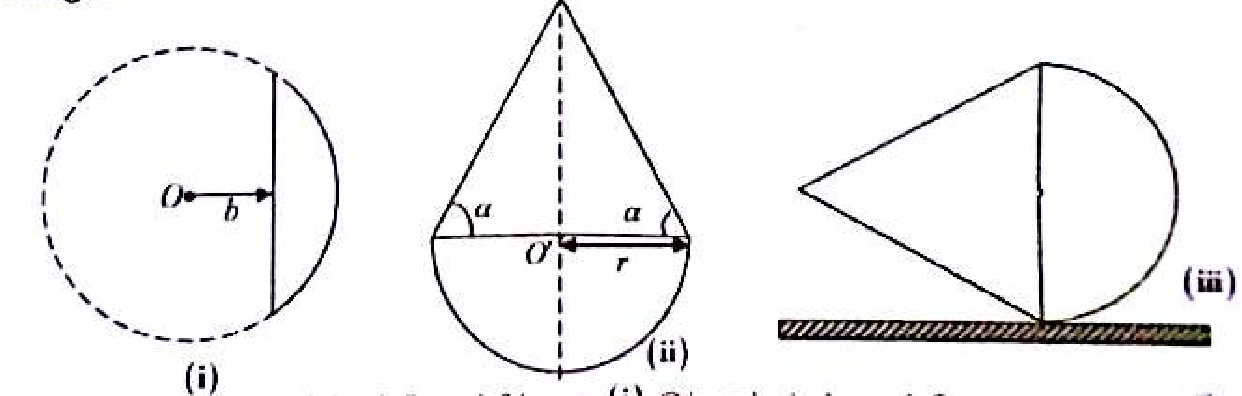
b. ABC என்பது ஒரு முக்கோணி ஆகும். AB யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும். புள்ளி E ஆனது $BE : EC = 1 : 2$ ஆகுமாறு பக்கம் BC யில் உள்ளது. கோடு AE உம் கோடு CD உம் P யில் சந்திக்கின்றன. A ஐக் குறித்து B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே **b, c** என எடுப்பதன் மூலம் $\frac{AP}{PE} = \frac{3}{2}$ எனவும் $\frac{CP}{PD} = \frac{4}{1}$ எனவும் காட்டுக.

Q15) a. சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, CD, BD என்னும் நான்கு இலேசான கோல்களாலான ஒரு சட்டப்படல் தொகுதி காணப்படுகின்றது. கோல் BD நிலைக்குத்தாக இருக்கும் அதேவேளை கோல் BC கிடையானது. சட்டப்படல் தொகுதியானது A யிலும் D யிலும் கிடை நிலத்தில் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை C யில் ஒரு w நிறை தொங்குகிறது. இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்திக் கோல்களிலுள்ள விசைகளைக் காண்க.



b. ஒவ்வொன்றும் w நிறையையும் a நீளமுமுடைய சீரான ஆறு சம கோல்கள் அறுகோணி $ABCDEF$ ஐ அமைக்குமாறு ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இவை உச்சி A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு B, F ஐத் தொடுக்கும் இலேசான கிடைக்கோல் BF இனாலும், C, E ஐத் தொடுக்கும் இலேசான கிடைக்கோல் CE இனாலும் ஒழுங்கான ஒரு அறுகோணி வடிவத்தில் பேணப்பட்டுள்ளன. தொகுதி சமனிலையில் தொங்கும் போது இலேசான கோல்கள் BF, CE என்பவற்றிலுள்ள தகைப்புகள் முறையே $\frac{5\sqrt{3}}{2}w, \frac{\sqrt{3}}{2}w$ எனக் காட்டுக.

Q16)



a ஆரையுடைய சீரான திண்மக் கோளத்தில் உரு **(i)** இல் காட்டப்பட்டதைப் போல அதன் மையம் O யிலிருந்து b தூரத்தில் வெட்டி பெரும்பகுதியை அகற்றுவதால் திண்ம கோளத்துண்டம் பெறப்படுகிறது. இதன் புவியீர்ப்பு மையம் கோளத்தின் மையம் O யிலிருந்து $\frac{3(a+b)^2}{4(2a+b)}$ எனும் தூரத்தில் உண்டு எனத் தொகையிடல் மூலம் காட்டுக.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

இதிலிருந்து சீரான a ஆரையுடைய u திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தைத் துணிக.
r ஆரையுடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளமும் r ஆரையுடைய சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பும் அவற்றின் தளமுகங்கள் சரியாகப் பொருந்தக் கூடியவாறு ஒட்டப்பட்டு ஆக்கப்பட்ட சேர்த்திப் பொருள் ஒன்று உரு (ii) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. அச் சேர்த்திப் பொருள்கள் எல்லாம் ஒரே அடர்த்தியுடையன எனக் கொள்க.

சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம் அதன் சமச்சீர் அச்சின் மீது O இலிருந்து தூரம் $\dfrac{r\left(\tan^2\alpha - 3\right)}{8 + 4\tan\alpha}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக. இக் காட்டப்பட்ட ஆனது உரு (iii) இல் காட்டியவாறு கரடான தளம் மீது வைக்கப்பட்டு ஓய்வில் பிடித்து விடுவிக்கப்படுகிறது. பின்வரும் நிபந்தனைகளில் என்ன நடைபெறும் என விளக்குக.

(a) $\alpha < \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (b) $\alpha > \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

17) a. A, B என்பன $P(A) = P(A/B) = \frac{1}{4}, P(B/A) = \frac{1}{2}$ ஆகுமாறு யாதுமிரு இரு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். பின்வரும் கூற்றுக்களில் எது சரி எது பிழை என நியாயத்துடன் கூறுக.

(i) A, B தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்ச்சிகள்

(ii) A, B என்பன இரு சாரா நிகழ்ச்சிகள்

(iii) $P(A'/B) = \frac{3}{4}$

(iv) $P(A'/B') = \frac{1}{2}$

b. இணைந்த கணித வினா ஒன்றைத் தீர்த்து முடிப்பதற்கு A, B, C எனும் மூன்று மாணவர்களிடம் தனித்தனியாகக் கொடுக்கப்பட்டது. A, B, C எனும் மாணவர்கள் அவ் வினாவைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ ஆகும் எனின், அவ் வினா தீர்க்கப்படத்தக்கதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

c. பாடசாலை மாணவர்கள் பரீட்சை ஒன்றில் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய விபரம் கீழ் உள்ள அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

புள்ளிகள்	எண்ணிக்கை
0 - 10	4
10 - 20	2
20 - 30	18
30 - 40	$f - 24$
40 - 50	$67 - f$
50 - 60	19
60 - 70	10
70 - 80	4
80 - 90	1

இப்பரம்பலின் ஆகாரம் 38 எனின் f ஐக் காண்க. மேலும் இப்பரம்பலின் இடை, இடையம், மாறற்றிறன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

*** END OF QUESTIONS ***